

SOBRE O ESPAÇO DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS POR PARTES, Júnior César Bonafim, Waldemar Donizete Bastos. 1.01 – Matemática – Departamento de Matemática – Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto.

A passagem do \mathfrak{R}^n para espaços mais gerais introduz fenômenos antes impossíveis no \mathfrak{R}^n . Um deles é a existência de Seqüência de Cauchy não convergente. Este fenômeno motiva a definição de Completude de um Espaço Vetorial Normado.

Apresentaremos neste trabalho o Espaço das Funções Contínuas por Partes denotado por $CP[a,b]$, definiremos uma norma sobre o mesmo e em seguida mostraremos que existe nesse espaço Seqüência de Cauchy não convergente. Dessa forma temos um exemplo de espaço normado que não é completo, ou seja, não é de Banach.

Definição 1: Diz-se que uma função real f é contínua por partes num intervalo $[a,b]$ se:

- (i) f é definida em $[a,b]$, exceto em um número finito de pontos;
- (ii) f é contínua em $[a,b]$, exceto em um número finito de pontos;
- (iii) os limites $f(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h)$, $f(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h)$ existem e são finitos em todo $x_0 \in [a,b]$. (Observemos que apenas um dos limites é cabível se x_0 é um extremo de $[a,b]$).

Quando x_0 é um ponto de continuidade de f , cada um desses limites é igual ao valor de f em x_0 , e temos então $f(x_0^+) = f(x_0) = f(x_0^-)$.

A condição de que esses limites sejam finitos em cada ponto de $[a,b]$ implica que as únicas descontinuidades de f são “saltos”.

Definição 2: Dizemos que duas funções contínuas por partes são iguais se elas diferem somente em um numero finito de pontos.

Definimos também duas operações em $CP[a,b]$: a adição e a multiplicação por escalar real. Ambas definidas da maneira usual, ou seja, ponto a ponto onde fizer sentido. É fácil verificar que o conjunto $CP[a,b]$ munido dessas operações é um espaço vetorial sobre \mathfrak{R} . Com a noção de igualdade dada na definição 2, verifica-se que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$ define um produto interno em $CP[a,b]$. Dessa maneira $CP[a,b]$ com a norma definida por $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$ é um espaço vetorial normado, que denotamos por $(CP[a,b], \| \cdot \|_2)$.

Definição 3: Um espaço vetorial normado E é dito Completo ou de Banach se todas as suas seqüências de Cauchy convergem em E .

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

Teorema: Existe seqüência de Cauchy em $(CP[a,b], \| \cdot \|_2)$ que não é convergente em $(CP[a,b], \| \cdot \|_2)$, ou seja, $(CP[a,b], \| \cdot \|_2)$ não é de Banach.

Idéia da demonstração:

Seja $\varphi_n : [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n-1} \\ 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \cup \left[\frac{1}{2n-1}, 1\right] \end{cases}$$

Agora seja $f_n = \sum_{j=1}^n \varphi_j$. Então $f_n \in CP[0,1] \forall n$. Fazendo uso da norma acima definida fica fácil mostrar que (f_n) é de Cauchy em $(CP[a,b], \| \cdot \|_2)$, porém não existe função $g \in CP[0,1]$ tal que $f_n \rightarrow g$ em $(CP[a,b], \| \cdot \|_2)$.

Referências

DOMINGUES, Hygino H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia, São Paulo: Atual, 1982. 184p.
 KREIDER, Donald L., Kuller, Robert G., Ostberg, Donald R., An Introduction to Linear Analysis, vol. 2, Reading, Addison-Wesley, 1966. 773p.